Interprétation géométrique du déterminant

Référence : **Théorie de l'intégration, Briane-Pagès p.253-254**

Théorème 1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ continue et $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurable. Alors $\lambda(u(X)) = |\det(u)|\,\lambda(X)$.

Exemple 2. Soit $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$. Alors $|\det(v_1, ..., v_n)|$ est le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $v_1, ..., v_n$.

Démonstration. (Théorème 1) Pour tout $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ on pose $f_u : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+, X \mapsto \lambda(u(X))$.
Étape 1 : Supposons u inversible.
Étape 1a : Montrons qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_u = c\lambda$.
Alors $\forall X \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))\ \ u(X) = (u^{-1})^{-1}(X)$ donc $f_u = u_*^{-1}\lambda(X)$ est une mesure sur $\mathbb{R}^n$. De plus,

$$\forall X \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))\ \ f_u(X+a) = \lambda(u(X+a)) = \lambda(u(X)+u(a)) = \lambda(u(X)) = f_u(X)$$

. f_u est invariante par translation et finie sur les parties bornées donc il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_u = c\lambda$.
Étape 1b : Montrons que $c = |dét(u)|$.
Si $u \in O(\mathbb{R}^n)$ alors $f_u(B(0,1)) = \lambda(u(B(0,1)) = \lambda(B(0,1))$ d'où $c = 1 = |det(u)|$
Dans le cas général, il existe $\omega \in O(\mathbb{R}^n)$ et $s \in S^{++}(\mathbb{R}^n)$ tels que $u = \omega s$. Par le théorème spectral, il existe $p \in O(\mathbb{R}^n)$ tel que $psp^{-1} = d$ où $d : e_i \mapsto \alpha_i e_i$ où $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont les valeurs propres de s comptées avec multiplicités.

$$f_u(p^{-1}([0,1]^n)) = \lambda(\omega p^{-1} d([0,1]^n)) = f_{\omega p^{-1}}(d([0,1]^n) = f_{\omega p^{-1}}((\prod_{i=1}^{n}[0,\alpha_i])$$

D'après le cas précédent,

$$\begin{aligned} f_{\omega p^{-1}}(\prod_{i=1}^{n}[0,\alpha_i]) &= |\det(\omega p^{-1})|\lambda((\prod_{i=1}^{n}[0,\alpha_i]) = |\det(\omega p^{-1})|\prod_{i=1}^{n}\alpha_i = |\det(\omega)||\det(p^{-1})||\det(s)| = |\det(\omega s)| \\ &= |\det(u)| \end{aligned}$$

D'où $|det(u)| = c$.

Étape 2 : Supposons u non inversible.
Alors pour tout $X \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ on a $u(X) \subseteq Im(u) \subseteq \mathbb{R}^n$ donc $\lambda(u(X)) \leq \lambda(Im(u))$.
On prend $(x_1, ..., x_p)$ une base de $Im(u)$ que l'on complète en $(x_1, ..., x_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On pose $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ qui envoie e_i sur x_i. v inversible car envoie une base sur une base. On pose $G = Vect(e_1, ..., e_p)$.
$v(G) = Im(u)$
Par le cas précédent, $\lambda(v(G)) = |det(v)|\lambda(G)$.
Or $G = \bigcup_{k=0}^{+\infty}[-k,k]^p \times \{0\}^{n-p}$ donc par continuité croissante de λ on a $\lambda(G) = 0$ d'où $\lambda(Im(u)) = 0$.
D'où $\forall X \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\ \ \lambda(u(X)) = 0 = |det(u)|\lambda(X)$.

□

Démonstration. (Exemple 2) En particulier, si $u : e_i \mapsto v_i$ on a $u([0,1]^n) = par(v_1, ..., v_n)$ d'où $vol(par(v_1, ..., v_n))$
$\lambda(u([0,1]^n)) = |det(u)|\lambda([0,1]^n) = |det(u)|$.

□

Questions potentielles

1) Pourquoi $u(X)$ est mesurable ?
Car $u(X) = (u^{-1})^{-1}(X)$ et que u^{-1} continue donc mesurable.

2) Pourquoi l'image d'une boule centrée en 0 par une matrice orthogonale est toujours la même boule ?
La norme est conservée donc on a $u(B) \subseteq B$ et $u^{-1}(B) \subseteq B$ d'où la double égalité.

3) D'où vient la décomposition polaire utilisée ?
On prend $S = \sqrt{A^T A}$ et $O = AS^{-1}$

4) Preuve du théorème spectral
Le spectre est réel car si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in Sp(A)$ et $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$ alors $\lambda x^* x = x^* A x = x^* A^* x = (Ax)^* x = \lambda^* x * x$. En particulier, $A = PTP^{-1}$ puis par décomposition QR on a $P = QR$ où Q orthogonale et R triangulaire supérieure d'où $A = QRTR^{-1}Q^{-1}$. Or $A = A^* = Q(RTR^{-1})^* Q^{-1}$ d'où $RTR^{-1} = (RTR^{-1})^*$ est triangulaire supérieure et inférieure donc diagonale.

5) Application de ce thm
Le théorème de changement de variables

6) Pourquoi la mesure de Lesbegue est l'unique mesure (à constante multiplicative près) finie sur les bornées et invariantes par translation ?
On montre qu'une autre mesure vérifiant ses hypothèses coïncident sur les pavés dont un sommet est 0 avec $c\lambda$, puis par invariance par translation c'est le cas pour n'importe quel pavé d'où l'égalité par le lemme des classes monotones.

7) Quelles sont les mesures de Radon vérifiant la relation du théorème
Si $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$ alors $\mu(\prod_{i=1}^{n} [0; a_i]) = |det(u)| \, \mu([0,1]^n) = c\lambda(\prod_{i=1}^{n} [0; a_i])$ où $c = \mu([0,1]^n) < +\infty$
Or $\{\prod_{i=1}^{n} [0; a_i]\}$ est un π-système engendrant $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ donc $\mu = c\lambda$

8) Quelle est la nature du solide $ABCD$ où $A(1,1,1), B(2,3,4), C(4,5,6), D(0,1,-1)$?

On pose $v_1 := B - A = (1,2,3), v_2 := C - A = (3,4,5), v_3 := D - A = (-1,0,-2)$. On pose u linéaire envoyant e_1 sur v_1,e_2 sur v_2, e_3 sur v_3.
Par développement selon la dernière colonne, $det(u) = (-1) \times (-2) - 2 \times (-2) = 2 + 4 = 6$ donc A, B, C, D sont non coplanaires et $ABCD$ est un tétraèdre.

$$\lambda(tetr(v_1, v_2, v_3)) = |det(u)| \, \lambda(tetr(e_1, e_2, e_3))$$

Or $tetr(e_1, e_2, e_3))$ a pour base le triangle rectangle de sommet $0, e_1, e_2$, qui a pour aire $1/2$.
De plus, la hauteur issue de e_3 est de longueur 1. Par conséquent,

$$\lambda(tetr(e_1, e_2, e_3)) = 1/6$$

$ABCD$ est un tétraèdre de volume 1.
Rq : Cette méthode est tout à fait générale, on vient de montrer que si A, B, C, D sont quatre points non coplanaires alors

$$vol(ABCD) = \frac{\left|det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})\right|}{6}$$